| Fen-Edebiyat Fakültesi | FİNAL SINAV KAĞIDI | |
|---|---|---|
| Ad Soyadı: | Bölümü: Matematik | NOTU |
| Numarası: | Dersin Adı: Analiz III | |
| İmza: | Sınav Tarihi: 3 Ocak 2019 | |

**Her soru 20 puandır. Süre 90dk.**

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^3}}{(n+1)\ln(n+1)}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulun.

**Çözüm:** Oran testi.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|^{(n+1)^3}}{(n+2)\ln(n+2)} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{|x+2|^{n^3}} = \lim_{n\to\infty} |x+2|^{3n^2+3n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \begin{cases} 0, & |x+2|<1 \\ \infty, & |x+2|>1 \end{cases}$$

$x+2=1$ ise seri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Cauchy sıklaştırma teoremi: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Yani seri $x+2=1$ için ıraksak.

$x+2=-1$ için seri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$. Bu seri alterne seri teoremine göre yakınsak. Yani yakınsaklık aralığı $-1 \le x+2 < 1$ veya $[-3,-1)$ aralığı.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulun ve bu aralık içerisinde noktasal limit fonksiyonunu belirleyin.

Not: $\frac{1}{1-x}$ fonksiyonunun Maclaurin açılımından yararlanabilirsiniz.

**Çözüm:**

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \implies \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \implies \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \implies \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} = \frac{3-2x}{(1-x)^2}, \qquad |x|<1.$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx)}$ serisinin $[0,\infty)$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyin.

**Çözüm:** $x>0$ ise

$$\left|\frac{x}{n(1+nx)}\right| \le \left|\frac{x}{n(0+nx)}\right| = \frac{1}{n^2}$$

$x=0$ için de aynı eşitsizlik sağlanır. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi $p=2$ serisi olup yakınsaktır. Orijinal seri Weierstrass M-testine göre yakınsaktır.

4. (A) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x+1}dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyin.

(B) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyin.

**Çözüm:** (A) $\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{e^x+1}dx + \int_1^\infty \frac{x^2}{e^x+1}dx$. Birinci integral sürekli bir integralin kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde integralidir ve vardır. İkinci integrale bakalım: $f(x) = \frac{x^2}{e^x+1}$ ve $g(x) = \frac{1}{x^2}$ için

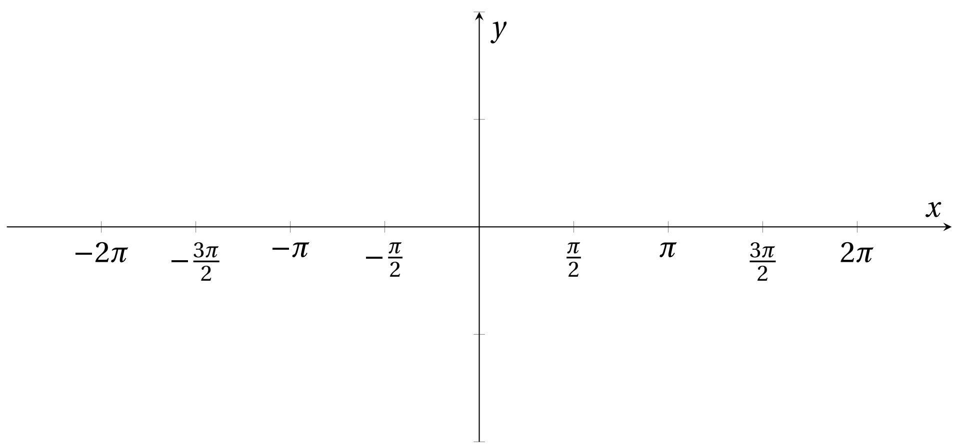
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x+1} = 0$$

(dört kere L'hospital kullanılarak bulunabilir.) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ bir $p = 2$ integrali olup yakınsaktır. Limit oran testine göre orijinal integral de yakınsaktır.

(B) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x}dx$ zira $[0,1]$ üzerinde $e^x \geq 1$. Son integral $p = 1$ integrali olup ıraksar. Orijinal integral de ıraksar.

5. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\pi/2 \\ 1, & x \geq \pi/2 \\ 0, & -\pi/2 < x < \pi/2 \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier serisinin sıfırdan farklı ilk üç terimini yazın.

(B) Fourier serisinin yakınsadığı fonksiyonu $[-2\pi, 2\pi]$ aralığında çizin.




**Çözüm:** Fonksiyon tektir ve dolayısıyla $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$ olur. $f(x)\sin nx$ iki tek fonksiyonunun çarpımı olup çifttir.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{-n}\Big|_{x=\pi/2}^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$$

$b_1 = \frac{2}{\pi}(\cos\pi/2 - \cos\pi) = \frac{2}{\pi}$, $b_2 = \frac{2}{2\pi}(\cos\pi - \cos 2\pi) = \frac{-2}{\pi}$, $b_3 = \frac{2}{3\pi}(\cos 3\pi/2 - \cos 3\pi) = \frac{2}{3\pi}$. Serinin ilk üç terimi: $\frac{2}{\pi}\sin x - \frac{2}{\pi}\sin 2x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x$.

Serinin $[-2\pi, 2\pi]$ üzerinde yakınsadığı fonksiyonu çizmek için $f$ fonksiyonunu $[-\pi, \pi]$ aralığı üzerinde çizin, sonra $2\pi$ periyotla genişletin, sıçrama yaptığı yerlerde fonksiyon sıçrama değerlerinin averajını alacak şekilde grafiği düzeltin. Örneğin $\pi/2$ noktasının solunda fonksiyon 0, sağında ise 1 olduğundan $\pi/2$ noktasında $1/2$ değerini almak zorunda.